Олимпиада по математике 9 класс

1 тур

**1.** Найти количество натуральных чисел, не превосходящих *1000*,  
не делящихся ни на *7*, ни на *11.*

**2.** На листе бумаги написаны тридцать три минуса. За один раз можно изменить любые четыре из уже написанных знаков на противоположные - минус на плюс и наоборот.  
Можно ли за несколько раз добиться, чтобы все знаки стали плюсами?

**3.** Расставить на шахматной доске *8* на *8* клеток несколько коней так, чтобы каждый из них бил ровно четырёх других.

**4.** В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* углы *А* и *D* равны, а серединные перпендикуляры к сторонам *АВ* и *CD* пересекаются на стороне *AD.*  
Доказать, что *АС=BD.*

**5.** Найти все простые числа р такие, что числа *р +10* и *р + 14* также просты.

2 тур

**1.** Можно ли выписать в ряд семь некоторых целых чисел так, чтобы сумма любых трёх идущих подряд чисел была отрицательной, а сумма всех - положительной?

**2.** Решить уравнение: *( х + а ) ( х + 2а ) ( х + За ) ( х + 4а ) = 360а 4*.

**3.** Пусть точки *Р* и *О* - основания перпендикуляров, опущенных из вершины *В* треугольника *АВС* на биссектрисы углов *ВАС* и *ВСА* соответственно, а точки *М* и *N* - середины сторон *АВ* и *ВС.*  
Доказать, что длина ломаной PMNQ равна половине периметра треугольника *АВС.*

**4.** В некоторой трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований трапеции, а угол между диагоналями равен *60* градусов. Доказать, что эта трапеция равнобокая.

**5.** Найти все трехзначные числа, которые в *12* раз больше суммы своих цифр.

**6.** Перед Бабой Ягой и Кащеем Бессмертным лежат две кучи мухоморов, в одной *100* штук, а в другой *150* штук.  
Эти персонажи по очереди берут грибы из куч,  
за один раз можно взягь любое ненулевое число грибов из одной из куч.  
Пропускать ход нельзя, выигрывает тот, после хода которого грибов не останется. Первой ходит Баба Яга.  
Кто из игроков выиграет при правильной игре?

3 тур

**1.** Найти все решения уравнения *|х2 – 4| + |х2 – 9| = 5*.

**2.** Баба Яга и Кащей Бессмертный собирали мухоморы.  
Общее число крапинок на мухоморах Бабы Яги оказалось в *13* раз больше, чем у Кащея.  
Когда Баба Яга отдала Кащею мухомор с наименьшим количеством крапинок,  
на её мухоморах стало в *8* раз больше крапинок, чем у Кащея.  
Доказать, что сначала у Бабы Яги было не более *23* мухоморов.

**3.** Пусть *Р* и *Q* — середины сторон *АВ* и *CD* четырёхугольника *ABCD*, *М* и *N* — середины диагоналей *АС* и *BD*.  
Докажите, что если прямые *MN* и *PQ* перпендикулярны, то *ВС* = *AD*.

**4.** Перед боем у Василия Ивановича и Петьки было поровну патронов.  
Василий Иванович израсходовал в бою в *8* раз меньше патронов, чем Петька,  
а осталось у него в *9* раз больше патронов, чем у Петьки.  
Доказать, что изначально количество патронов у Василия Ивановича делилось на *71*.

**5.** Один рабочий может выполнить работу за *4* часа, а другой — за *6* часов.  
Сколько должен работать третий рабочий, чтобы сделать эту работу,  
если его производительность равна средней производительности первых двух.