**Вариант 1**

Задача № 1:  
  
Сумма квадратов n простых чисел, каждое из которых больше 5, делится на 6. Докажите что и n делится на 6.

**Решение.**  
Если сумма нескольких чисел делится на шесть,  
то и сумма их остатков при делении на шесть тоже будет делится на 6.  
Простое число, большее пяти, может иметь при делении на 6 только остатки 1 или 5  
(иначе это число будет делиться на 2 или 3).  
Следовательно, квадрат любого простого числа, большего чем 5, имеет при делении на 6 остаток 1.  
Так как сумма этих остатков равна количеству чисел n, значит n делится на 6.

Задача № 2:

Петя и Вася сделали в тире по 5 выстрелов.  
Первыми тремя выстрелами они выбили поровну, а последними тремя Петя выбил в три раза больше очков, чем Вася. На мишени остались пробоины в 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3, 2 очков. Куда попал каждый из них третьим выстрелом?  
Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

**Ответ.** Третьим выстрелом Петя выбил 10, а Вася - 2 очка.

**Решение.**  
Последними тремя выстрелами Вася не мог выбить больше, чем 9 очков  
(иначе Петя бы выбил последними тремя выстрелами не меньше 30).  
Меньше 9 очков Вася тоже выбить не мог, так как наименьшая сумма за три выстрела 2 + 3 + 4 = 9.  
Следовательно, Вася выбил 2, 3 и 4 очка а Петя 10, 9 и 8 очков  
(других вариантов набрать 27 очков тремя выстрелами нет).  
Значит первыми двумя выстрелами мальчики выбили 9, 8, 5 и 4 очка.  
При этом Петя третьим выстрелом выбил не меньше, чем 8, а Вася - не больше, чем 4 очка.  
Так как сумма очков после первых трех выстрелов была равной,  
значит, первыми двумя выстрелами Петя выбил по крайней мере на четыре очка меньше, чем Вася.  
Единственная возможность - Вася выбил 9 и 8, а Петя 5 и 4 очка,  
следовательно, третьим выстрелом Вася выбил 2, а Петя 10 очков.

Задача № 3:

Если дату 10 февраля 2001 года записать в виде 10.02.2001, а затем убрать точки,  
то получится палиндром (т.е. число, читающееся слева направо и справа налево одинаково).  
Найдите ближайшую к 10.02.2001 дату, обладающую тем же свойством. Рассмотрите два случая:   
1) требуемая дата еще не наступила,  
2) требуемая дата уже прошла.  
Ответ обосновать.

**Ответ.**   
1) 20 февраля 2002  
2) 29 ноября 1192 года.  
  
**Решение.**   
Заметим, что при условии, что дата записывается как палиндром,  
день и месяц однозначно находятся по заданному году.

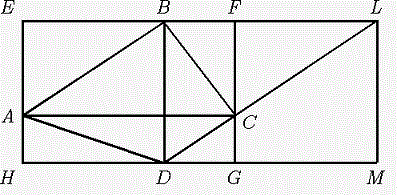
(1): в 2001 году других палиндромов быть не может,  
а в следующем (2002) году это должен быть 20 день второго месяца.

(2): Чтобы дата была как можно ближе к 2001 году, необходимо брать самый большой возможный год, меньший 2001. Вторая цифра года должна быть первой цифрой месяца, то есть 0 или 1, т.к. месяцев не больше 12.  
В 2000 году палиндрома быть не может (нулевого дня не бывает),  
следовательно, первые две цифры года - 11 (соответственно, месяц - ноябрь).  
Третью цифру года нужно взять максимально возможную, т.е. девять, тогда четвертой  
(так как в ноябре не больше 31 дня) может быть два.  
Получится дата-палиндром 29.11.1192.

Задача № 4:

В выпуклом четырехугольнике ABCD стороны AB и CD параллельны, а диагонали AC и BD перпендикулярны. Докажите, что AD + BC = AB + CD.

**Решение.**   
Впишем четырехугольник ABCD в прямоугольник EFGH со сторонами,  
параллельными диагоналям (EF AC и EH BD) - смотри рисунок.  
Пусть L - точка пересечения прямых DC и EF, а M - точка на прямой HG такая, что LM FG.  
Тогда ABLC - параллелограмм, следовательно, AB = CL.  
Так как GM = FL = EB = HD и AH = CG, то треуг-к AHD = треуг-ку CGM ,  
следовательно, AD = CM. BC + CM = BC + AD .  
Но BM = DL как диагонали прямоугольника BLDM, и DL = DC + CL = DC + AB.  
Следовательно, AD + BC = DL = DC + CL = DC + AB, что и требовалось доказать.

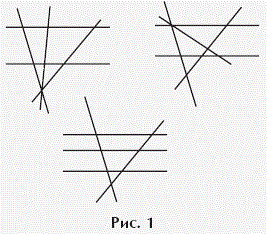


**Вариант 2:**

Задача № 1 :

Нарисуйте на плоскости пять различных прямых так, чтобы они пересекались ровно в семи различных точках.

Решение :  
Три возможных ответа изображены на рисунке 1.  
Можно показать, что других конфигураций из пяти прямых, пересекающихся ровно в семи различных точках, нет.

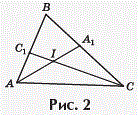


Задача № 2 :  
  
Мальчик пошел с отцом в тир. Отец купил ему 10 пулек.  
В дальнейшем отец за каждый промах отбирал у сына одну пульку,  
а за каждое попадание давал одну дополнительную пульку.  
Сын выстрелил 55 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?

Ответ: 50.

Решение :  
Каждый раз, когда мальчик попадал в цель, число имеющихся у него пулек оставалось прежним  
(одну использовал и одну получил от отца).  
Каждый раз, когда мальчик промахивался, число имеющихся у него пулек уменьшалось на 2  
(одну использовал и одну отобрал отец).  
Это значит, что сын за 55 выстрелов промахнулся 10 : 2 = 5 раз, стало быть, попал 55 – 5 = 50 раз.

Задача № 3 :  
  
Две биссектрисы треугольника пересекаются под углом 60°.  
Докажите, что один из углов этого треугольника равен 60°.



Решение :  
Пусть биссектрисы *AA*1 и *CC*1 треугольника *ABC* пересекаются в точке *I* (рис.2).  
Допустим, что http://www.5egena5.ru/images1/s8.gif*AIC*1 = 60°. По теореме о внешнем угле треугольника

http://www.5egena5.ru/images1/3.gif

откуда

http://www.5egena5.ru/images1/s8.gif*BAC* + http://www.5egena5.ru/images1/s8.gif*BCA* = 120°

и

*http://www.5egena5.ru/images1/s8.gifABC* = 180°– http://www.5egena5.ru/images1/s8.gif*BAC* – http://www.5egena5.ru/images1/s8.gif*BCA* = 60°.

Но это еще не все решение: ведь может случиться, что http://www.5egena5.ru/images1/s8.gif*AIC* = 60°. Однако тогда

http://www.5egena5.ru/images1/s8.gif*IAC* + http://www.5egena5.ru/images1/s8.gif*ICA* = 120°,

откуда

http://www.5egena5.ru/images1/s8.gif*BAC* + http://www.5egena5.ru/images1/s8.gif*BCA* = 240°,

что невозможно.

Задача № 4 :  
  
Когда Винни-Пух пришел в гости к Кролику, он съел 3 тарелки меда, 4 тарелки сгущенки и 2 тарелки варенья,  
а после этого не смог выйти наружу из-за того, что сильно растолстел от такой еды.  
Но известно, что если бы он съел 2 тарелки меда, 3 тарелки сгущенки и 4 тарелки варенья или 4 тарелки меда,  
2 тарелки сгущенки и 3 тарелки варенья, то спокойно смог бы покинуть нору гостеприимного Кролика.  
От чего больше толстеют: от варенья или от сгущенки?

Ответ : от сгущенки.

Решение :  
По условию

3м + 4с + 2в > 2м + 3с + 4в,

откуда

м + с > 2в. (\*)

По условию же

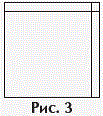
3м + 4с + 2в > 4м + 2с + 3в,

откуда

2с > м + в.

Складывая последнее неравенство с неравенством (\*), получаем м + 3с > м + 3в, откуда с > в.

Задача № 5 :  
  
В каждой клетке клетчатой доски размером 50 х 50 записано по числу.  
Известно, что каждое число в 3 раза меньше суммы всех чисел, записанных в клетках, соседних с ним по стороне,  
и в 2 раза меньше суммы всех чисел, записанных в клетках, соседних с ним по диагонали.  
Докажите, что каждую клетку доски можно покрасить в красный или синий цвет так,  
что сумма всех чисел, записанных в красных клетках, равна сумме всех чисел, записанных в синих клетках.



Решение :  
Покажем, что подойдет раскраска клеток доски в шахматном порядке.  
Заметим, что сумма данного числа и его соседей по диагоналям равна сумме соседей этого числа по сторонам:  
обе суммы втрое больше данного числа.  
Поэтому в квадрате 2 х 2, находящемся в углу доски, суммы чисел в красных и синих клетках совпадают:  
обе они втрое больше числа, стоящего в угловой клетке доски.  
Также совпадают суммы чисел в красных и синих клетках любого прямоугольника 3 х 2,  
примыкающего длинной стороной к краю доски:  
обе они втрое больше числа, стоящего в средней клетке стороны, примыкающей к краю доски.  
Наконец, совпадают суммы чисел в красных и синих клетках любого квадрата 3 х 3:  
обе они втрое больше числа, стоящего в центре квадрата.

Разобьем доску 50 х 50 на квадрат 48 х 48, квадрат 2 х 2 и два прямоугольника 2 х 48, как показано на рисунке 3.  
Квадрат 48 х 48 разобьем на квадраты 3 х 3, а прямоугольники 2 х 48 — на прямоугольники 3 х 2,  
примыкающие длинной стороной к краю доски.  
В каждом из этих квадратов и прямоугольников суммы чисел, стоящих в красных и синих клетках, равны.  
Значит, они равны и на всей доске.

**Вариант 3:**

Задача № 1 :  
  
 В трех кучках лежат соответственно 12, 24 и 19 спичек.  
За ход можно переложить спичку из одной кучки в другую.  
За какое наименьшее число ходов можно получить три кучки с 8, 21 и 26 спичками?

Ответ : 4.

Решение :

Менее чем 4 ходами не обойтись:  
чтобы получить кучку из 8 спичек, придется из любой первоначальной кучки убрать как минимум 4 спички.  
Четырех ходов достаточно: перекладываем из кучки с 12 спичками по 2 спички в кучки с 19 и 24 спичками.

Задача № 2 :  
  
Сколько всего есть четырехзначных чисел, которые делятся на 19 и оканчиваются на 19?

Ответ : 5 .

Решение :   
Пусть http://www.5egena5.ru/images1/5.gif— такое число. Тогда N – 19 тоже кратно 19. Но http://www.5egena5.ru/images1/6.gif  
Поскольку 100 и 19 взаимно просты, то двузначное число делится на 19. А таких всего пять: 19, 38, 57, 76 и 95.  
Легко убедиться, что все числа 1919, 3819, 5719, 7619 и 9519 нам подходят.

Задача № 3 :  
  
У даты 12.04.1961 (то есть 12 апреля 1961 года) сумма цифр равна 24.  
Найдите ближайшую дату после 01.01.2008, у которой сумма цифр равна: а)  35; б)  7.

Ответ : а) 29.09.2049; б) 03.01.2010.

Решение :  
а) Наибольшая сумма цифр числа равна 11 для 29-го числа.  
Наибольшая сумма цифр месяца равна 9 для сентября, то есть для 09.  
Значит, наибольшая сумма цифр в текущем году будет у даты 29.09.2008. Она равна 30, что меньше 35.  
Следовательно, надо менять и год. Последняя цифра года не более 9, и если мы сохраняем первые две цифры,  
то придется цифру десятилетий увеличить до 4.

б) Для 2008 года сумма цифр года уже больше 27, поэтому год придется изменить.  
Ближайший год в будущем с меньшей суммой цифр — 2010-й.  
Соответственно, ближайшая подходящая дата 03.01.2010.

Задача № 4 :  
  
Среди целых чисел от 8 до 17 включительно зачеркните как можно меньше чисел так,  
чтобы произведение оставшихся было точным квадратом.  
В ответе укажите сумму всех вычеркнутых чисел.

Ответ : 55.

Решение :  
Чтобы произведение было точным квадратом,  
нужно, чтобы каждый простой множитель входил в него в четной степени.  
В произведение 8 · 9·...· 17 в нечетной степени входят 2, 7, 11, 13 и 17.  
Значит, мы обязаны вычеркнуть сомножители 11, 13 и 17.  
А вот чтобы «убить» лишние простые множители 2 и 7, хватит одного вычеркнутого сомножителя 14.  
Итого сумма вычеркнутых чисел равна 11 + 13 + 14 + 17 = 55.

Задача № 5 :  
  
На гранях кубика расставлены 6 различных чисел от 6 до 11.  
Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырех боковых гранях оказалась равна 36, во второй — 33.  
Какое число написано на грани, противоположной той, где написана цифра 10?

Ответ : 8.

*Решение :*

Cумма чисел на всех гранях равна 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 51.  
При первом броске сумма на верхней и нижней гранях равна 51 – 36 = 15,  
при втором — 51 – 33 = 18. Значит, на третьей паре противоположных граней сумма равна 51 – 15 – 18 = 18.  
Сумму 18 можно получить двумя способами: 11 + 7 или 10 + 8.  
Значит, на парах граней с суммой 18 напротив 11 находится 7, а напротив 10 — 8.

Задача № 6 :  
  
В конкурсе участвовали 5 человек.  
На каждый вопрос один из них дал неправильный ответ, остальные — правильный.  
Число правильных ответов у Пети равно 10 — меньше, чем у любого другого.  
Число правильных ответов у Васи равно 13 — больше, чем у любого другого.  
Сколько всего вопросов было в конкурсе?

Ответ : 14 .

Решение :   
Так как на каждый вопрос были даны 4 правильных ответа, общее число правильных ответов делится на 4.  
Поскольку Петя дал 10 верных ответов, Вася — 13, а остальные трое — от 11 до 12, то общее число правильных ответов не меньше, чем 10 + 13 + 3 х 11 = 56, и не больше, чем 10 + 13 + 3 х 12 = 59.  
Из чисел в этих пределах только 56 кратно 4, поэтому число вопросов равно http://www.5egena5.ru/images1/8.gif

Задача № 7 :  
  
Команда из Пети, Васи и одноместного самоката участвует в гонке.  
Дистанция разделена на участки одинаковой длины, их количество равно 42, в начале каждого — контрольный пункт.  
Петя пробегает участок за 9 мин, Вася — за 11 мин, а на самокате любой из них проезжает участок за 3 мин.  
Стартуют они одновременно, а на финише учитывается время того, кто пришел последним.  
Ребята договорились, что один проезжает первую часть пути на самокате, остаток бегом, а другой — наоборот (самокат можно оставить на любом контрольном пункте).  
Сколько участков Петя должен проехать на самокате, чтобы команда показала наилучшее время?

Ответ : 18

Решение :  
Если Петя проедет 18 участков и пробежит оставшиеся 42 – 18 = 24, он затратит 18 х 3 + 24 х 9 = 270 мин.  
При этом Васе, наоборот,  
достанется проехать 24 участка, а пробежать 18, на что уйдет 24 х 3 + 18 х 11 = 270 мин — то же самое время.  
Если же Петя проедет меньшее число участков, то его время (и, соответственно, время команды) увеличится.  
Если Петя проедет большее количество участков, то увеличится время Васи (и время команды).

Достаточно обозначить число проезжаемых Петей участков через x и решить уравнение

*x*·3 + (42 – *x*)·9 = (42 – *x*)·3 + 11*x*.